Osaka University Knowledge Archive

Title	函數方程式ニツイテ, IV
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 83 p.8-p.13
Issue Date	1936-03-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74291
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

368. 函數方程式ニ就イテ, IV

福原満洲雄（北大）

§9. $F(X)$ ガ完全連續ナ一次函數デ, $\lambda=1$ ガ固有値ナラバ

$$\Phi_\lambda(X) \equiv X - \lambda F(X) = x$$

ノ解ハ $\lambda=1$ ノ近傍デ

$$X = x - \lambda G_\lambda(x),$$

$$G_\lambda = \sum_{p=0}^{\infty}(\lambda-1)^p A_p + \sum_{p=1}^{\mu}(\lambda-1)^{-p} B_p$$

ナル形ニ書ケル、但シ $A_p(x)$, $B_p(x)$ モ亦完全連続ナ一次函数デアル。

定理 26.「M_μ デ $A_p=0$, N_μ デ $B_p=0$」

N_μ デ考ヘレバ $\lambda=1$ ハ固有値デナイカラ $B_p=0$ トナルコトハ前回ニ注意シタ所デアル。λ ガ固有値デナイ時ニハ $\Phi_\lambda(M_\mu)=M_\mu$, $\Phi_\lambda(N_\mu)=N_\mu$ デアルコトニ注意スレバ $x\in M_\mu$ ナル時 $\Phi_\lambda(X)=x$ ヲ満足スル X ハ

$$X = -\frac{1}{\lambda-1}x + \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\Phi(x) \cdots\cdots + (-1)^\mu\frac{\lambda^{\mu-1}}{(\lambda-1)^\mu}\Phi^{\mu-1}(x)$$

ニ依ッテ與ヘラレルコトガ分ル。コレト $X=x-\lambda G_\lambda(x)$ ト比較スルコトニ依リ $A_p=0$ ヲ得ル。

$$F+G_\lambda=\lambda F G_\lambda,\quad F+G_\mu=\mu F G_\mu$$

カラ簡單ナ計算デ

$$G_\lambda - G_\mu = (\mu-\lambda)G_\mu G_\lambda = (\mu-\lambda)G_\lambda G_\mu.$$

ヲ得ル。コノ関係ニ G_λ, G_μ ノ $\lambda=\mu=1$ ニ於ケル展開式ヲ入レテ係數ヲ比較スルコトニヨリ

$$B_{p+q-1} = B_p B_q$$

$$A_p B_q = B_p A_q = 0$$

$$A_{p+q+1}=A_pA_q$$

ヲ得ル、ソコデ

$$\overline{G}_\lambda=\sum_{p=0}^{\infty}(\lambda-1)^pA_p,\qquad \overline{\overline{G}}_\lambda=\sum_{p=1}^{\mu}(\lambda-1)^{-p}B_p$$

ト置ケバ，以上証明シタ所カラ

定理27. 「$G_\lambda=\overline{G}_\lambda+\overline{\overline{G}}_\lambda$，$\overline{G}_\lambda\overline{\overline{G}}_\mu=\overline{\overline{G}}_\mu\overline{G}_\lambda=0$，$M_\mu$デハ $\overline{G}_\lambda=0$，$\overline{\overline{G}}_\lambda=G_\lambda$；$N_\mu$デハ $\overline{G}_\lambda=G_\lambda$，$\overline{\overline{G}}_\lambda=0$. $\lambda=1$デ$\overline{G}_\lambda$ハ正則，$\overline{\overline{G}}_\lambda$ハ$\lambda=1$ヲ極トシテ持チ，其ノ他ノ点デハ（$\infty$ヲ含メテ）到ル所正則デアル」

コレト定理16トカラ

定理28. 「$X-\lambda\overline{F}(X)=0$ノ解ハ $x-\lambda\overline{G}_\lambda(x)=X$ ニ依ッテ、$X-\lambda\overline{\overline{F}}(X)=x$ノ解ハ $x-\lambda\overline{\overline{G}}_\lambda(x)=X$ ニ依テ與ヘラレル」

Riesz ノ〔13〕「$X-\lambda\overline{\overline{F}}(X)=x$ノ固有値ハ$\lambda=1$ダケデアル」ハ此ノ定理ノ一部分トシテ含マレテヰル。

§10. $B_1(E)=L$ トスレバ $B_1^2=B_1$ カラ Lノ有界集合ガ緊ッテヰルコトガ分ル、従ッテ L ハ有限ナ次元ヲ持ツ、故ニ

$$B_1(x)=\psi_1(x)\varphi_1+\cdots\cdots+\psi_n(x)\varphi_n$$

トナル。$\varphi_1,\cdots\cdots,\varphi_n$ハ$L$ニ属スル独立ナ点，$\psi_1(x),\cdots\cdots,\psi_n(x)$ハEデ完全連続且ツ互ニ独立ナ一次汎函数デ$N_\mu$ノ点デハ0トナル。

$B_1^2 = B_1$ カラ

$$\psi_j(\varphi_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

ヲ得ル。　$B_2 = B_1 B_2$ デアルカラ

$$B_2(E) \subseteqq B_1(E) = L$$

従ッテ

$$B_2(x) = \chi_1(x)\varphi_1 + \cdots\cdots + \chi_n(x)\varphi_n$$

トナル、更ニ $B_2 = B_2 B_1$ ナル関係ヲ使ヘバ

$$B_2(x) = \sum_{j,k} a_{jk}\psi_k(x)\varphi_j, \quad a_{jk} = \chi_j(\varphi_k)$$

ヲ得ル、一般ニ $B_{p+1} = B_p B_2 = B_2^p$ カラ

$$B_{p+1}(x) = \sum_{j,k} a_{jk}^{(p)}\psi_k(x)\varphi_j, \quad (a_{jk}^{(p)}) = (a_{jk})^p$$

ヲ得ル。$B_\mu \neq 0$, $B_{\mu+1} = 0$ デアルカラ

$$(a_{jk})^\mu \neq 0, \quad (a_{jk})^{\mu+1} = 0$$

デアル。$\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_n$ ハ L ニ属スル n 個ノ独立ナ点デアレバヨイカラ、ソレヲ適当ニトルコトニヨリ行列 (a_{jk}) ヲ標準形トスルコトガ出来ル。ソノ結果

$$B_2(x) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j-1}\psi_{k+1}^{(j)}(x)\varphi_k^{(j)}$$

$$B_{p+1}(x) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j-p}\psi_{k+p}^{(j)}(x)\varphi_k^{(j)}$$

トナル。但シ

$$\psi_{k+p}^{(j)}(x) = 0 \quad (k+p > m_j), \quad m_1 + \cdots\cdots + m_r = n$$

デアル。（以上ノ計算ハ大体 *Lalesco, Introduction à la théorie des équations intégrales, Chap.* II. ニヨル。）コレデ $B_1, \ldots\ldots, B_\mu$ ノ構造ガ分ッタ。

§ 11. $\Phi^p B_1 = F^p B_{p+1}$ ナル関係カラ

$$\sum_j \sum_k \psi_k^{(j)}(x)\, \Phi^p(\varphi_k^{(j)}) = \sum_j \sum_k \psi_{k+p}^{(j)}(x)\, F^p(\varphi_k^{(j)})$$

ヲ得ル。n 個ノ $\psi_k^{(j)}(x)$ ガ一次的ニ独立デアルカラ

$$\Phi^p(\varphi_k^{(j)}) = F^p(\varphi_{k-p}^{(j)})$$

トナル。但シ $k \leqq p$ ノトキ $\varphi_{k-p}^{(j)} = 0$ デアル。故ニ

$$\Phi^p(\varphi_k^{(j)}) = 0 \qquad (p \geqq k)$$

ヲ得ル、コレハ $\varphi_p^{(j)} \in M_p$ ナルコトヲ示ス。$\varphi_p^{(j)}$ ガ M_{p-1} ニ属シナイコトガ証明サレタトスレバ

$$\Phi(\varphi_{p+1}^{(j)}) = F(\varphi_p^{(j)})$$

従ッテ

$$\Phi^p(\varphi_{p+1}^{(j)}) = F(\Phi^{p-1}(\varphi_p^{(j)})) = \Phi^{p-1}(\varphi_p^{(j)}) \neq 0$$

ヲ得ルカラ $\varphi_{p+1}^{(j)}$ ハ M_p ニ属シナイ、依ッテ $\varphi_p^{(j)}$ ハ M_p ニ属シ M_{p-1} ニ属シナイ点デアル、特ニ $\varphi_1^{(1)}, \ldots\ldots, \varphi_1^{(r)}$ ハ M ノ点デアル。

逆ニ $\varphi \in M$ トスル。

$$\varphi - F(\varphi) = 0, \quad \varphi - \lambda F(\varphi) = \xi$$

カラ $(1-\lambda)\varphi=\xi$ ヲ得ル。一方ニ於テ $\varphi=\xi-\lambda G_\lambda(\xi)$ デアルカラ

$$\varphi=B_1(\varphi)+(\lambda-1)^{-1}B_2(\varphi)+\cdots\cdots+(\lambda-1)^{-\mu+1}B_\mu(\varphi)$$

ガ勝手ナ入ニ對シテ成立スル、依テ

$$\varphi=B_1(\varphi),\quad B_2(\varphi)=\cdots\cdots=B_\mu(\varphi)=0$$

ヲ得ル、コレカラ φ ガ $\varphi_1^{(1)},\cdots\cdots,\varphi_1^{(r)}$ ノ一次式トシテ表ハサレルコトヲ知ル。一般ニ歸納法ニ依ッテ M_p ノ点ハ

$$\varphi_k^{(j)}\qquad (k=1,2,\cdots\cdots,p;\quad j=1,2,\cdots\cdots,r)$$

ノ一次式トシテ表ハサレルコトガ証明サレル、故ニ $B_1,\cdots\cdots\cdots\cdots,B_\mu$ ヲ知ルコトニ依テ $M_1,\cdots\cdots,M_\mu$ ガ求マル。